Zur Summierbarkeit von Faber-Reihen

Tietz, Horst

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 43, 1992,
S.35-43

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Summierbarkeit von Faber-Reihen

Von **Horst Tietz***, Hannover

(Eingegangen am 9.10.1992)

0. Vorbemerkungen

Potenzreihen sind das natürliche Hilfsmittel, um Funktionen darzustellen, die in Kreisen holomorph sind. Die Aufgabe, für ein allgemeines einfach zusammenhängendes Gebiet G eine Polynomfolge zu konstruieren, die für jede in G holomorphe Funktion eine Reihenentwicklung nach diesen Polynomen gestattet, wurde von G. FABER in seiner klassischen Arbeit [3] mit der Einschränkung gelöst, daß der Rand von G eine *analytische Kurve* ist.

Hieran schloß und schließt sich eine lange Kette von Untersuchungen an, die sich mit Erweiterungen und Anwendungen des Faberschen Ergebnisses nach verschiedenen Richtungen befassen (vgl. [2]), wobei die Fabertheorie vornehmlich auf die Theorie der schlichten Funktionen, beginnend mit der berühmten Arbeit [5], bis heute eine stimulierende Kraft ausübt.

Eines der nächstliegenden Probleme betrifft die Möglichkeit, allgemeinere als analytische Ränder zuzulassen, wobei man dann die Güte der Konvergenz abschwächen muß. In dieser Hinsicht hatte Paul HEUSER ([6], [7]) festgestellt: im Falle eines konvexen Jordanrandes besitzt eine in $\overline{G}$ stetige und in G holomorphe Funktion eine Faberreihe und wird durch diese im Sinne abelscher Summierbarkeit dargestellt.

Die vorliegende Note soll diese Resultate korrekt und in verständlicher Form herleiten; das ist
– *wünschenswert*, weil selbst ein so taktvoller Rezensent wie G. SZEGÖ schreibt [8]: „*Various details of the paper remain unclear to the reviewer*“, und
– *möglich*, weil der Kalkül der *Laurent-Trennung*, den Verf. (vgl. etwa [9]) als angemessene Struktur für die Faber-Theorie nachgewiesen hat, auch diese Arbeiten von P. Heuser durchsichtig zu machen vermag.

1. Aufgabe und Lösungsansatz

G sei ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen z-Ebene. Es soll eine Folge (p_n) von Polynomen konstruiert werden derart, daß jede in G holomorphe Funktion f dort dargestellt werden kann durch eine Reihe $\sum a_n p_n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Falls G ein Kreis ist, wird das Problem durch die klassische Taylorreihe gelöst. Hierauf führt Faber allgemeinere Gebiete zurück, indem er die Riemannsche Funktion φ zuhilfe nimmt, die das *Außengebiet* $G^* := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$ konform auf das Äußere eines Kreises

* Prof. em. Dr. H. Tietz · Röddinger Straße 31 · 3008 Garbsen

K abbildet: wenn dann $f \circ \psi$ – wir bezeichnen die Inverse von φ mit ψ – in der Nähe des Randes ∂K von K noch als holomorphe Funktion definiert sein sollte, besitzt sie dort eine Laurentreihe, deren Rückverpflanzung mittels φ in die z-Ebene die Entwicklung von f in G nach den „Faberschen Polynomen" liefert. Für die Durchführung dieses Gedankens ist der Kalkül der Laurent-Trennung (§ 2) das geeignete Hilfsmittel.

Die entscheidende Bedingung aber, daß $f \circ \psi$ bei ∂K definiert ist, erfordert weitere Voraussetzungen; denn ersichtlich haben f und φ i.a. disjunkte Definitionsbereiche.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, $f \circ \psi$ einen Sinn zu geben, oder was dasselbe ist, zu sichern, daß die Definitionsbereiche von f und φ ein Ringgebiet bei ∂G gemeinsam haben:

– Faber setzt voraus, daß ∂G eine analytische Jordankurve ist; dadurch erreicht er, daß φ noch auf ∂G holomorph und schlicht ist und damit fortsetzbar in eine innere Halbumgebung U^- von ∂G: f und φ sind nun beide auf U^- definiert, und $f \circ \psi$ ist auf der inneren Halbumgebung $V^- := \varphi(U^-)$ von ∂K, die o.B.d.A. als Kreisring angenommen werden kann, durch eine Laurentreihe darstellbar; für f besteht also in U^- eine Entwicklung

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \varphi^n,$$

aus der die Laurent-Trennung unmittelbar die gesuchte Polynomentwicklung in G produziert (§ 3).

– Heuser schwächt diese Annahme über ∂G ab, muß nun aber an f zusätzliche Forderungen stellen. Er betrachtet den Fall, daß ∂G eine Jordankurve[1]) ist und daß f nicht nur in G holomorph, sondern auf $\bar{G}$ noch stetig ist. Dann ist φ auf ∂G umkehrbar-stetig fortsetzbar, und $f \circ \psi$ wird auf ∂K stetig. Nun liefert aber die Abbildung φ die Möglichkeit, $f \circ \psi$ dadurch auf eine äußere Halbumgebung V^+ von ∂K fortzusetzen, daß man die Randwerte auf Radien konstant nach außen ausbreitet; damit ist auch f auf die äußere Halbumgebung $U^+ := \psi(V^+)$ von ∂G fortgesetzt, wo auch φ definiert ist. Diese Fortsetzung F von f ist zwar, anders als φ, nicht mehr holomorph, hat aber die Eigenschaft, daß sie auf jedem φ-Urbild von zu K konzentrischen Kreisen aus V^+ Spur einer holomorphen Funktion ist; wählt man diese Urbilder, die ja analytische Kurven sind, als Integrationswege für die Laurent-Trennung, so liegt wieder der Faber-Fall vor. Die Abhängigkeit vom Integrationsweg schließlich wird durch einen Grenzprozeß geklärt, der auf die Abel-Summation der erhaltenen Faberreihe führt (§ 4).

[1]) Heuser setzt voraus, daß G *konvex* ist; obgleich er in seinem Beweis diese Annahme zu verwenden versucht, ist sein Ergebnis davon unabhängig. Statt dessen muß vorausgesetzt werden, daß ∂G *rektifizierbar* ist.

2. Die Laurent-Trennung

G sei ein ebenes Jordangebiet, das von einer rektifizierbaren Kurve C berandet wird ($C = \partial G$). Ferner sei $G^* := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$ das Innere des Komplementes von G in der geschlossenen Ebene $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Wir betrachten Funktionen f, die in inneren Halbumgebunen U^- von C (d. h. $U^- := U \cap G$, U: Umgebung von C) holomorph sind. Es ist wichtig, daß wir *holomorphe Funktionen stets mit ihren analytischen Fortsetzungen identifizieren!*

Als Integrationswege für die im folgenden definierten *Laurent-Operationen* L und L^* wählen wir in U^- verlaufende und zu C homologe Kurven[2]):

$$L\,f: z \to \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in G$$

$$L^* f: z \to -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in \overline{G^*}.$$

Die Bezeichnung „Laurent-Trennung“ für das Paar (L, L^*) rechtfertigt sich aus der Beziehung

(1) $\quad f = Lf + L^*f,$

wobei f holomorph in U^- ist; dabei ist

(1a) $\quad Lf \quad$ holomorph in G,

(1b) $\quad L^*f \quad$ holomorph in $\overline{G^*}$ mit $L^*f(\infty) = 0$.

Trivialerweise sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(2a) \quad \begin{cases} f \quad \text{holomorph in } G \\ Lf = f \\ L^*f = 0; \end{cases}$$

ebenso:

$$(2b) \quad \begin{cases} f \quad \text{holomorph in } \overline{G^*} \text{ und } f(\infty) = 0 \\ L^*f = f \\ f = 0. \end{cases}$$

Einfach aber entscheidend ist die durch L bewirkte *Konvergenzerweiterung*: sind die Funktionen f_n in einer gemeinsamen Halbumgehung U^- von ∂G holomorph und konvergiert dort die Folge (f_n) kompakt gegen f, so kovergiert die Folge (Lf_n) in G kompakt gegen Lf.

3. Analytischer Rand

Die Riemannsche Abbildung

(3) $\quad \varphi: G^* \to K_r^* := \{t;\ |t| > r\},\ \varphi(\infty) = \infty,$

läßt sich über ganz C hinaus in eine innere Halbumgehung U^- von C hinein fortsetzen, wenn C *analytisch* ist (vgl. [1], S. 95). Da φ dann auf C noch injektiv ist, gibt es ein U^-,

2) Diese Integrale sind offenbar von der genauen Lage der Integrationswege unabhängig, vorausgesetzt daß der Pol z innerhalb des Weges bleibt.

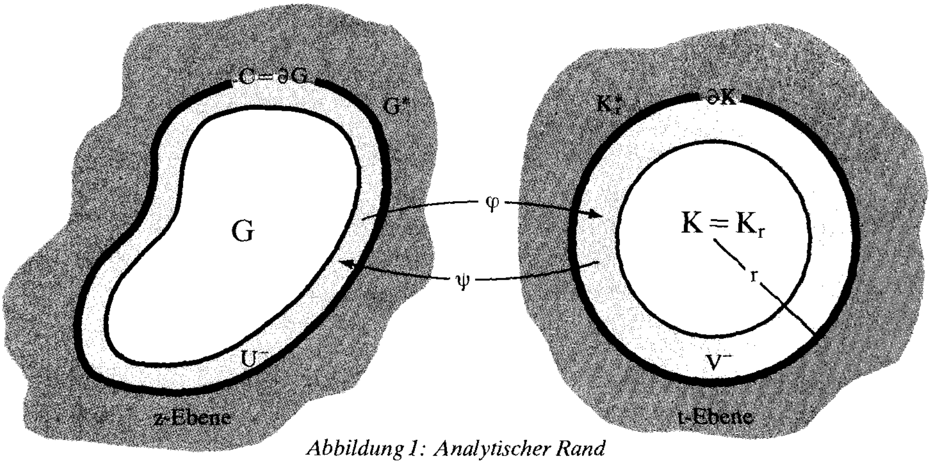

Abbildung 1: Analytischer Rand

das von φ konform auf einen Kreisring $V^- := \{t; r^* < |t| < r\}$ abgebildet wird. Ist nun f in G holomorph, so ist $f \circ \psi$ in V^- holomorph und besitzt eine dort kompakt konvergente Laurent-Entwicklung

$$f(\psi(t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n,$$

die, nach U^- zurück verpflanzt, die dort kompakt konvergente Darstellung

$$(4) \qquad f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \varphi^n$$

liefert. Wendet man hierauf den L-Operator an, so erhält man die in G kompakt konvergente Reihe

$$(4a) \qquad Lf = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n L(\varphi^n);$$

hierin gilt links wegen (2a)

$$Lf = f,$$

und rechts wegen (1) und dem Liouville-Theorem

$$L(\varphi^n) = \begin{cases} \text{Polynom n-ten Grades für } n \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{für } n < 0; \end{cases}$$

(4a) ist die gesuchte Entwicklung

$$(5)\qquad f = \sum_{0}^{\infty} a_n p_n$$

nach den *„Faberschen Polynomen“*

$$(5a)\qquad p_n := L(\varphi^n).$$

Wie üblich *normieren* wir noch φ dadurch, daß ψ bei ∞ eine Taylorentwicklung der Form

$$(3a)\qquad \psi(t) = t + \sum_{0}^{\infty} \alpha_k t^{-k}$$

besitzt. Dann sind die α_k sowie der Radius r festgelegt, und die p_n sind nach (5a) und (1) *normierte Polynome* n-*Grades:*

$$p_n(z) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \ldots + \beta_n.$$

4. Rektifizierbarer Jordanrand

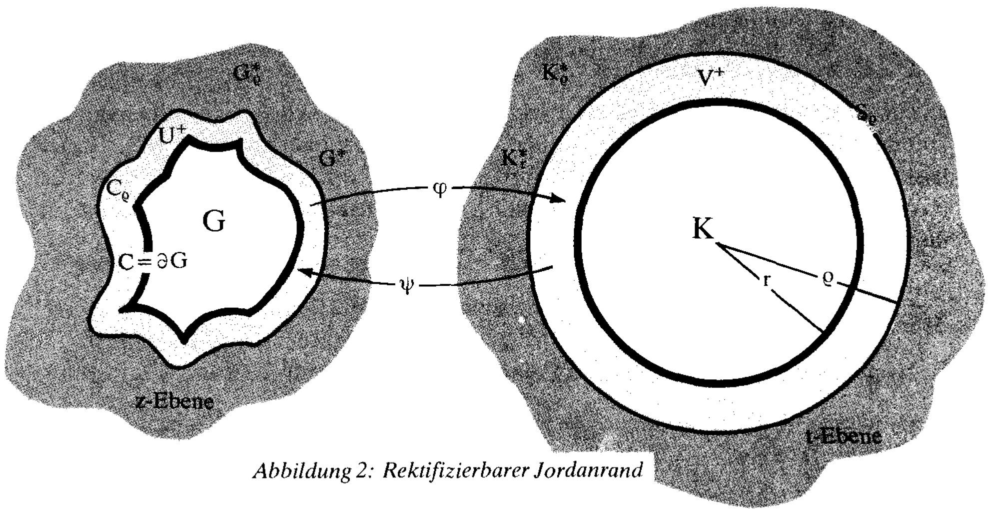

Abbildung 2: Rektifizierbarer Jordanrand

Jetzt sei der Rand C von G eine *rektifizierbare Jordankurve,* und die gegebene Funktion f *in* $\bar{G}$ *stetig und in* G *holomorph.*

φ sei wieder die Abbildung (3) und ψ ihre Umkehrung. Die Voraussetzungen über C haben wichtige Randeigenschaften von ψ zur Folge, von denen wir zunächst benötigen, daß φ sich auf C als topologische Abbildung fortsetzen läßt (vgl. [1], S. 88).

Wir betrachten die Schar S_ϱ, $\varrho > r$, der zu $S_r := \partial K_r$ konzentrischen Kreise und ihre φ-Urbilder $C_\varrho := \psi(S_\varrho)$. Diese sind für $\varrho > r$ analytische Jordankurven; ihre Innengebiete seien G_ϱ und L_ϱ und L_ϱ^* die entsprechenden Laurent-Operationen; insbesondere ist $C_r = C$ und $G_r = G$.

Die hübsche Idee von P. Heuser besteht nun darin, $f \circ \psi$ dadurch über C hinaus zu einer Funktion F fortzusetzen, daß die Randwerte von f auf C längs den φ-Urbildern der Radien von K_r^*, den orthogonalen Trajektorien der C_ϱ, konstant ausgebreitet werden:

$$F(\psi(t)) := f(\psi(r\frac{t}{|t|})), \ |t| \geq r.$$

F ist nun außerhalb G zwar nur stetig, $F(\psi(t))$ stimmt aber jeweils auf S_ϱ mit $f(\psi(\frac{r}{\varrho}t))$, F also auf C mit der dort holomorphen Funktion

$$(7) \qquad f_\varrho := (f \circ \psi) \circ (\frac{r}{\varrho}\varphi)$$

überein. Auf die in G_ϱ holomorphe Funktion $L_\varrho f_\varrho$ kann wegen der Analytizität der C_ϱ das Faber-Theorem angewandt werden: für jedes $\varrho > r$ erhält man eine in G_ϱ kompakt konvergente Darstellung

$$(8) \qquad L_\varrho f_\varrho = \sum_0^\infty a_n^{(\varrho)} p_n^{(\varrho)}$$

mit den zum jeweiligen G_ϱ gehörenden Faber-Polynomen $p_n^{(\varrho)}$.

Die Klärung der Abhängigkeit von ϱ geschieht in drei Schritten:

I. Zunächst bemerken wir, daß die Wirkung von L_ϱ auf Funktionen, die in einem U^+ holomorph sind, nach dem Cauchyschen Integralsatz unabhängig von ϱ ist[3]). Ferner leistet φ wegen (3a) für jedes $\varrho \geq r$ die normierte Abbildung von G_ϱ^* auf K_ϱ^*, und wegen (5a) ist damit $p_n^{(\varrho)}$ ebenfalls unabhängig von ϱ. Wir dürfen also die Faber-Polynome für diesen allgemeineren Fall durch

$$p_n := p_n^{(\varrho)}, \ \varrho > r$$

definieren.

II. Nach (4) und (5a) sind die $a_n^{(\varrho)}$ als Laurent-Koeffizienten für $n \geq 0$ aus

$$f_\varrho = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(\varrho)} \varphi_n$$

zu berechnen. Nun ist nach (7) aber

$$f_{\varrho_1}(\psi(t)) = f_{\varrho_2}(\psi(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}t));$$

[3]) z liegt in G!

mithin gilt

$$a_n^{(\varrho_1)} = a_n^{(\varrho_2)} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^n .$$

Wir können also für alle $n > 0$ definieren

$$a_n := \left(\frac{\varrho}{r}\right) a_n^{(\varrho)}$$

und erhalten

(8a) $$a_n^{(\varrho)} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n a_n .$$

III. Wir behaupten nun

(9) $$\lim_{\varrho \to r+0} L_\varrho f_\varrho = f.$$

Stellen wir f in G als Cauchy-Integral dar, so lautet diese Behauptung

(9a) $$\lim \int_{C_\varrho} H(\zeta)\, d\zeta = \int_C H(\zeta)\, d\zeta$$

mit $H(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} f(\psi(\frac{r}{|\zeta|}\, \varphi(\zeta)))$.

Bei festem $z \in G$ ist H stetig für $|\zeta| \geq r$. Führen wir durch $\zeta = \psi(t), T = \varrho e^{i\alpha}$ Polarkoordinaten ein, so erhalten wir für $\varrho > r$

(10) $$\int_{C_\varrho} H(\zeta)\, d\zeta = i\varrho \int_0^{2\pi} H(\psi(\varrho\, e^{i\alpha}))\, \psi'(\varrho\, e^{i\alpha})\, e^{i\alpha}\, d\alpha .$$

Entscheidend ist nun das Randverhalten von ψ'. Hierzu zitieren wir[4]):

(a) ψ' ist H^1-Funktion (Hardy-Klassifizierung; $\psi' \in H^1$ bedeutet, daß die Bogenlängen der C_ϱ beschränkt sind);

(b) ψ' hat f. ü. („fast überall") radiale Grenzwerte für $\varrho \to r+0$;

(c) die hierdurch definierte Randfunktion – sie werde wieder mit ψ' bezeichnet – ist L-integrierbar

[4]) An dieser Stelle habe ich Herrn Helmut KÖDITZ für seine wertvollen Hinweise zu danken: Die folgenden Aussagen finden sich etwa in [4], und zwar

(a)	auf S. 369, Satz 1.2
(b) und (c)	auf S. 353, Mitte
(d)	auf S. 355, Satz 2 (5)
(e)	auf S. 369, Satz 1.3
(f)	auf S. 355, Satz 2 (6).

und es gilt

$$\text{(d)}\quad \lim_{\varrho\to r+0}\int_0^{2\pi}|\psi'(\varrho e^{i\alpha})|\,d\alpha=\int_0^{2\pi}|\psi'(re^{i\alpha})|\,d\alpha;$$

(e) die Randfunktion von ψ ist f.ü. nach α differenzierbar, und diese Ableitung der Randfunktion und die Randfunktion der Ableitung stehen in der Relation

$$\frac{d\psi(re^{i\alpha})}{d\alpha}=ir\psi'(re^{i\alpha})\,e^{i\alpha};$$

schließlich besteht die wichtige Beziehung

$$\text{(f)}\quad \lim_{\varrho\to r+0}\int_0^{2\pi}|\psi'(\varrho e^{i\alpha})-\psi'(re^{i\alpha})|\,d\alpha=0.$$

Wegen (b) und (c), die – ebenso wie (e) – aus (a) folgen, hat die rechte Seite von (10) noch für $\varrho=r$ einen Sinn, und wegen (e) ist sie gleich der rechten Seite von (9a). Aus der Stetigkeit von $\varrho(H\circ\psi)$ folgt die Existenz von $M>0$, derart daß gilt

$$|rH(\psi(re^{i\alpha}))|\leq M \text{ für } 0\leq\alpha\leq 2\pi,$$

und zu gegebenem $\varepsilon>0$ die Existenz von $r_\varepsilon>r$, derart daß gilt

$$|\varrho H(\psi(\varrho e^{i\alpha}))-rH(\psi(re^{i\alpha}))|\leq\varepsilon \text{ für } 0\leq\alpha\leq 2\pi,\ r\leq\varrho\leq r_\varepsilon.$$

Mithin erhalten wir

$$\begin{aligned}&\left|\int_{C_\varrho}H(\zeta)\,d\zeta-\int_C H(\zeta)\,d\zeta\right|\leq\\ &\leq\int_0^{2\pi}|\psi'(\varrho e^{i\alpha})|\,|\varrho H(\psi(\varrho e^{i\alpha}))-rH(\psi re^{i\alpha}))|\,d\alpha\\ &\quad+\int_0^{2\pi}|H(\psi(re^{i\alpha}))|\,|\psi'(\varrho e^{i\alpha})-\psi'(re^{i\alpha})|\,d\alpha\\ &\leq\varepsilon\int_0^{2\pi}|\psi'(\varrho e^{i\alpha})|\,d\alpha+M\int_0^{2\pi}|\psi'(\varrho e^{i\alpha})-\psi'(re^{i\alpha})|\,d\alpha;\end{aligned}$$

hieraus folgt mit (d) und (f) die Behauptung (9a) und damit (9).

Aus (8), (8a) und (9) erhalten wir schließlich den Heuserschen Satz in gereinigter Form:

Das Gebiet G *werde von der rektifizierbaren Jordankurve* C *berandet;* p_n *seien die zu* G *gehörenden Faber-Polynome. Jede in* G *stetige und in* G *holomorphe Funktion* f *besitzt in* G *eine dort kompakt abel-summierbare Faber-Entwicklung*

$$f = \lim_{\varkappa \to 1-0} \sum_{0}^{\infty} a_n \varkappa^n p_n.$$

Literatur

[1] Carathéodory, C.: Funktionentheorie II. 2. Auflage. Birkhäuser. Basel 1961.
[2] Curtiss, J.H.: Faber polynomials and the Faber series. Amer. Math. Monthly **78**, 577–596 (1971).
[3] Faber, G: Über polynomische Entwicklungen I. Math. Ann. **57**, 389–408 (1903).
[4] Golusin, G.M.: Geometrische Funktionentheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1957.
[5] Grunsky, H.: Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. Math. Z. **45**, 29–61 (1939).
[6] Heuser, P: Zur Approximation analytischer Funktionen durch Polynome. Math. Z. **45**, 146–154 (1939).
[7] Heuser, P.: Zur Theorie der Faberschen Polynomreihen. Deutsche Math. **4**, 451–454 (1939).
[8] Szegö, G.: Referat zu [7]. Math. Rev. **1**, 14 (1940).
[9] Tietz, H.: Faber series and the Laurent decomposition. Michigan Math. J. **4**, 175–179 (1957).